ENS CACHAN (M'1 MI

DURÉE : 4 heures

Pour tout ouvert non vide $U$ de $\mathbb{R}^2$, on note $H(U)$ l'ensemble des applications $u$ continues sur $U$ à valeurs réelles et telles que:

i) les applications partielles $t \longmapsto u(x,t)$ sont de classe $C^1$;

ii) les applications partielles $x \longmapsto u(x,t)$ sont de classe $C^2$;

iii) $\forall (x,t) \in U \qquad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t).$

On note $\overline{H}(U)$ l'ensemble des applications $u$ continues sur l'adhérence $\overline{U}$ de $U$ et telles que $u|_U \in H(U)$ (où $|$ désigne la restriction).
On désigne par $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des réels positifs ou nuls et par $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des réels strictement positifs.

## I

1. On note $U$ l'ouvert $]a,b[\times]0,c[$, $a,b$ réels avec $a < b$ et $c \in ]0,+\infty]$. On note $\partial U$ la frontière de $U$.
   Soit $u \in \overline{H}(U)$ et $\varepsilon$ un réel strictement positif. On pose, pour $(x,t) \in U$,

   $$u_\varepsilon(x,t) = u(x,t) + \varepsilon x^2$$

   et on fixe un point $(x_0,t_0) \in U$.

   (a) Montrer que la restriction de $u_\varepsilon$ à $[a,b] \times [0,t_0]$ ne peut atteindre son maximum en $(x_0,t_0)$.(On pourra raisonner par l'absurde et s'intéresser au signe de $\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(x_0,t_0)$ et de $\dfrac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2}(x_0,t_0)$.)

   (b) En déduire

   $$u(x_0,t_0) \leq \sup\{u(y,s);\ (y,s) \in \partial U \ \text{ et } \ s \leq t_0\}.$$

2. Dans cette question $u$ désigne une fonction *bornée* de $\overline{H}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*)$. On note $M_0$ la quantité $M_0 = \sup_{y \in \mathbb{R}} u(y,0)$ et on fixe $(x_0,t_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

   (a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $u(x_0,t_0) - \varepsilon(t_0 + \frac{x_0^2}{2}) \leq M_0$.
   (On pourra faire intervenir l'ouvert $]-A,A[\times\mathbb{R}_+^*$ pour une valeur de $A$ convenablement choisie et utiliser la question précédente.)

   (b) En déduire $u(x_0,t_0) \leq M_0 = \sup_{y \in \mathbb{R}} u(y,0)$.

## II

On note $E$ l'espace des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, qu'on munit de la norme $\|f\| = \sup_{y \in \mathbb{R}} |f(y)|$.
Pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, on pose

$$\Gamma(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t}.$$

ENS CACHAN (M') MI

Pour $f \in E$ on définit la fonction $Kf$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ par:

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \qquad Kf(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\Gamma(x-y,t)\,dy$$

$$\text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad Kf(x,0) = f(x).$$

On rappelle que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy = \sqrt{\pi}$.

1. Montrer que $\Gamma$ appartient à $H(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*)$.
2. Montrer que, si $f \in E$, $Kf$ est bien définie, est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, et que

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \qquad |Kf(x,t)| \leq \|f\|.$$

(On pourra utiliser, après l'avoir justifiée, la relation:

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \qquad Kf(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x + v\sqrt{4t})e^{-v^2}\,dv.)$$

3. (a) Montrer soigneusement que, pour tout réel $x$, la fonction $t \longmapsto Kf(x,t)$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $\dfrac{\partial Kf}{\partial t}$.

   (b) Montrer de même brièvement que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $x \longmapsto Kf(x,t)$ est de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}$.

   (c) Conclure que $Kf$ appartient à $\overline{H}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*)$.

4. Montrer que pour tout $f \in E$, il existe une *unique* fonction $F \in \overline{H}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*)$ *bornée* et telle que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x,0) = f(x)$.

5. Déduire de ce qui précède

$$\forall f \in E,\ \forall s,t > 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \quad Kf(x,s+t) = \int_{-\infty}^{\infty} Kf(y,s)\Gamma(x-y,t)\,dy.$$

*Les notations de* II *sont conservées pour les parties suivantes.*

## III

1. Soit $f \in E$. Montrer que pour tout $t > 0$, on a

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad |Kf(x,t) - Kf(y,t)| \leq \frac{\|f\|}{\sqrt{\pi t}}|x-y|.$$

(On pourra estimer $\dfrac{\partial Kf}{\partial x}$.)

2. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de $H(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*)$. On suppose:

   i) $\exists M > 0\ \forall n \geq 0\ \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \qquad |u_n(x,t)| \leq M$,

   ii) $(u_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers $u$.

ENS CACHAN (M') M1

(a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C_\varepsilon > 0$ tel que:

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ \forall n \geq 0 \qquad |u_n(x,\varepsilon) - u_n(y,\varepsilon)| \leq C_\varepsilon |x-y|.$$

(On pourra faire intervenir l'application $(x,t) \longmapsto u_n(x, t+\frac{\varepsilon}{2})$.)

(b) En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $A > 0$, la suite $(u_n(\cdot,\varepsilon))_{n\geq 0}$ converge uniformément vers $u(\cdot,\varepsilon)$ sur $[-A,A]$.

(c) Montrer alors que $u$ appartient à $H(\mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^*)$.

## IV

1. On définit une suite $(g_n)_{n\geq 0}$ de fonctions sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^*$ par:

$$\forall n \geq 0,\ \forall (x,t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^* \qquad g_n(x,t) = \sum_{k=-n}^{n} \Gamma(x+2k,t).$$

(a) Montrer que la suite $(g_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^*$ vers une fonction $G$ continue, et que, pour tout $t \in \mathbf{R}_+^*$, l'application $x \longmapsto G(x,t)$ est périodique de période 2 et paire.

(b) Montrer que $G$ est uniformément bornée sur les ensembles $\mathbf{R} \times [\varepsilon, +\infty[$, $\varepsilon > 0$.
(On pourra d'abord établir l'inégalité:

$$\forall (x,t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^* \qquad G(x,t) \leq \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-k^2/4t}.)$$

(c) En déduire que $G$ appartient à $H(\mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^*)$ (on pourra utiliser la partie III).

2. Soit $f \in E$ périodique de période 2. Montrer

$$\forall (x,t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^* \qquad Kf(x,t) = \int_{-1}^{1} f(y) G(x-y,t)\, dy.$$

3. Soit $\varphi$ une fonction continue sur $[0,1]$, à valeurs réelles, telle que $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. On définit la fonction $\Phi$ sur $[0,1] \times \mathbf{R}_+$ par:

$$\forall (x,t) \in [0,1] \times \mathbf{R}_+^* \qquad \Phi(x,t) = \int_0^1 \varphi(y)(G(x-y,t) - G(x+y,t))\, dy$$

$$\text{et} \quad \forall x \in [0,1] \qquad \Phi(x,0) = \varphi(x).$$

Montrer que $\Phi$ est l'*unique* élément de $\overline{H}(]0,1[ \times \mathbf{R}_+^*)$ vérifiant:

$$\forall x \in [0,1]\ \ \Phi(x,0) = \varphi(x) \qquad \text{et} \qquad \forall t \in \mathbf{R}_+\ \ \Phi(0,t) = \Phi(1,t) = 0.$$

Pour $y, x \in ]0,1[$ et pour $t > 0$, on pose $P(y,x,t) = G(x-y,t) - G(x+y,t)$.

4. On cherche à montrer que $P(y,x,t)$ est toujours strictement positif. Pour cela, on fixe $(x_0,t_0) \in ]0,1[ \times \mathbf{R}_+^*$.

**Tournez la page S.V.P.**

ENS CACHAN (M') MI

(a) Montrer que pour tout $y \in ]0,1[$, $P(y, x_0, t_0) \geq 0$ (on pourra raisonner par l'absurde et utiliser I1.).

(b) En recherchant des solutions s'écrivant $F(x,t) = g(x)e^{-\lambda t}$ où $g$ et $\lambda$ sont convenablement choisis, montrer qu'il existe une fonction $F \in \overline{H}(]0,1[\times\mathbb{R}_+^*)$ telle que

$$\forall t \geq 0 \quad F(0,t) = F(1,t) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in ]0,1[ \quad \forall t \geq 0 \quad F(x,t) > 0.$$

En déduire qu'il existe $y_0 \in ]0,1[$ tel que $P(y_0, x_0, t_0) > 0$.

(c) On fixe alors $\delta \in ]0, t_0[$ et $\varepsilon > 0$ tels que $\forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, $P(y_0, x_0, t) \geq \varepsilon$, et on pose, pour $(y,t) \in ]0, y_0[\times]0, 2\delta[$, $u(y,t) = P(y, x_0, t_0 + t - \delta)$. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que:

$$\forall (y,t) \in ]0, y_0[\times]0, 2\delta[, \qquad u(y,t) \geq C(\Gamma(y-1,t) - \Gamma(y+1,t)).$$

En déduire

$$\forall y \in ]0, y_0[ \qquad P(y, x_0, t_0) > 0.$$

(d) Montrer de même

$$\forall y \in ]y_0, 1[ \qquad P(y, x_0, t_0) > 0.$$